Praktische opdracht Wiskunde B Pi

π = Pi
Wiskunde Praktische Opdracht

π'tje precies

3,141592653589793238462643383279502884197169
3993751058209749445923078164062862089986280
34825342117067982148086513282306647093844609
55058223172535940812848111745028410270193852
11055596446229489549303819644288109756659334
46128475648233786783165271201909145648566923
46034861045432664821339360726024914127372458
70066063155881748815209209628292540917153643
67892590360011330530548820466521384146951941
51160943305727036575959195309218611738193261
17931051185480744623799627495673518857527248
91227938183011949129833673362440656643086021
39494639522473719070217986094370277053921717
62931767523846748184676694051320005681271452
63560827785771342757789609173637178721468440
90122495343014654958537105079227968925892354
20199561121290219608640344181598136297747713
09960518707211349999998372978049951059731732
81609631859502445945534690830264252230825334
46850352619311881710100031378387528865875332
08381420617177669147303598253490428755468731
15956286388235378759375195778185778053217122
68066130019278766111959092164201989380952572
01065485863278865936153381827968230301952035
30185296899577362259941389124972177528347913
15155748572424541506959508295331168617278558

89075098381754637464939319255060400927701671
13900984882401285836160356370766010471018194
29555961989467678374494482553797747268471040
47534646208046684259069491293313677028989152
10475216205696602405803815019351125338243003
55876402474964732639141992726042699227967823
54781636009341721641219924586315030286182974
55570674983850549458858692699569092721079750
93029553211653449872027559602364806654991198
81834797753566369807426542527862551818417574
67289097777279380008164706001614524919217321
72147723501414419735685481613611573525521334
75741849468438523323907394143334547762416862
51898356948556209921922218427255025425688767
17904946016534668049886272327917860857843838
27967976681454100953883786360950680064225125
20511739298489608412848862694560424196528502
22106611863067442786220391949450471237137869
60956364371917287467764657573962413890865832
64599581339047802759009946576407895126946839
83525957098258226205224894077267194782684826
01476990902640136394437455305068203496252451
74939965143142980919065925093722169646151570
98583874105978859597729754989301617539284681
38268683868942774155991855925245953959431049
97252468084598727364469584865383673622262609
91246080512438843904512441365497627807977156
91435997700129616089441694868555848406353422
07222582848864815845602850601684273945226746
76788952521385225499546667278239864565961163
54886230577456498035593634568174324112515076
06947945109659609402522887971089314566913686
72287489405601015033086179286809208747609178
24938589009714909675985261365549781893129784
82168299894872265880485756401427047755513237
96414515237462343645428584447952658678210511
41354735739523113427166102135969536231442952
484937187110145765403590279934403742007310578
539062198387447808478489683321445713868751943
5064302184531910484810053706146806749192781911
9793995206141966342875444064374512371819217999
839101591956181467514269123974894090718649423

1961567945208095146550225231603881930142093762
1378559566389377870830390697920773467222182562
5996615014215030680384477345492026054146665925
2014974428507325186660021324340881907104863317
3464965145390579626856100550810665879699816357
4736384052571459102897064140110971206280439039
75951567715770042033786993600723055876317635942
18731251471205329281918261861258673215791984148
48829164470609575270695722091756711672291098169
091528017350671274858322287183520935396572512108
357915136988209144421006751033467110314126711136
990865851639831501970165151168517143765761835155
650884909989859982387345528331635507647918535893
226185489632132933089857064204675259070915481416
549859461637180270981994309924488957571282890592
323326097299712084433573265489382391193259746366
73058360414281388303203824903758985243744170291
32765618093773444030707469211201913020330380197
62110110044929321516084244485963766983895228684
78312355265821314495768572624334418930396864262
434107732269780280731891544110104468232527162010
526522721116603966655730925471105578537634668206
5310989652691862056476931257058635662018558100729
3606598764861179104533488503461136576867532494416
6803962657978771855608455296541266540853061434443
18586769751456614068007002378776591344017127494704
2056223053899456131407112700040785473326993908145
4664645880797270826683063432858785698305235808933
06575740679545716377525420211495576158140025012622
8594130216471550979259230990796547376125517656751
35751782966645477917450112996148903046399471329621
07340437518957359614589019389713111790429782856475
03203198691514028708085990480109412147221317947647
772622414254854540332157185306142288137585043063321
751829798662237172159160771669254748738986654949450
114654062843366393790039769265672146385306736096571
2091807638327166416274888800786925602902284721040317
21186082041900042296617119637792133757511495950156604
96318629472654736425230817703675159067350235072835405
670403867435136222247715891504953098444893330963408780
769325993978054193414473774418426312986080998886874132
604721569516239658645730216315981931951673538129741677

2947867242292465436680098067692

Wiskunde Praktische Opdracht: Inhoudsopgave

INHOUDSOPGAVE (Incl. taakverdeling) Pag.

Wiskunde Praktische Opdracht: Inleiding

Inleiding π

Wie heeft er nou nog nooit van het getal π gehoord? Bijna iedereen heeft er ooit wel van gehoord, heeft formules met π gezien of heeft er ooit mee gewerkt. Maar hoewel veel mensen met π werken, weten toch niet veel mensen wat het nou eigenlijk voor getal is, waar π voor staat...

Als leerlingen met Natuurprofielen komt natuurlijk het getal π vaak voor en dat is dan voor ons ook één van de redenen om ons wiskunde PO over π te maken. Want wat heeft het voor zin om een formule uit je hoofd te leren zonder dat je precies begrijpt wat er staat? Natuurlijk kan je een formule wel uit je hoofd leren en gewoon dan de som invullen en waarschijnlijk krijg je dan ook nog eens het goede antwoord. Maar als er dan aan je gevraagd wordt waarom π in die formule gebruikt wordt... dat antwoord zal waarschijnlijk nooit gegeven worden.

Tijdens het zoeken naar informatie over π blijkt dat over de hele wereld mensen geïnteresseerd zijn in dit getal. We zijn zelfs op een site gestrand waar het mogelijk was om 1.250.000 decimalen van π te downloaden, en natuurlijk hebben we dit ook gedaan. Andere dingen die we vonden waren bijvoorbeeld π quizzen, informatie over een bepaalde π dag en bepaalde gedichtjes om een bepaald aantal decimalen van π te onthouden. Uiteindelijk hebben we uit al deze van informatie het beste en leukste genomen en verwerkt in dit PO...

We hebben voordat we begonnen met het PO eerst bedacht wat we wilden onderzoeken. Als eerste natuurlijk het belang van Pi, want zonder dat kom je niet ver. Vervolgens, als je het belang hebt, dan komt de definitie van Pi, want ja.. die kan je natuurlijk goed gebruiken als je het nodige ervan wilt begrijpen. Ook wisten we dat er iets was met de kwadratuur van de cirkel... Nog iets om te onderzoeken dus! De volgende onderwerpen die we bedacht hadden waren: Een programma om π te benaderen, waar π

thuishoort in de getallenverzameling en natuurlijk de geschiedenis van π. Vervolgens om het helemaal compleet te maken hebben we er nog een aantal leuke weetjes over π bijgevoegd en een paar gedichten die iets met π te maken hebben.
En uiteindelijk is dit er dus uit gekomen...

Wiskunde Praktische Opdracht: Definitie Pi

De definitie van π

In het Griekse alfabet is pi de zestiende letter, het symbool voor pi is:p Het symbool p werd rond de 18e eeuw voor het eerst gebruikt, waarschijnlijk omdat p het eerste woord is van het Griekse woord π😉😉😉μ😉😉😉😉, wat in het Nederlands omtrek is.
William Jones was een Engelse wiskundige en de eerste die het symbool p heeft gebruikt als de verhouding van omtrek en diameter, maar p werd pas het vaste symbool voor de verhouding van omtrek en diameter in 1748 nadat het door Euler vaak werd gebruikt in zijn boek “Introduction”.De definitie van pi is: de verhouding van de omtrek tot de middellijn van een cirkel.
De formule is dus: omtrek=2p x straal.

Kenmerken van π

Pi is een belangrijk getal.. Het is de bekendste getal in de wiskunde en ook een mysterieuze getal. Pi is een irrationaal getal , het is geen breuk, het is onmeetbaar en het is ook nog een transcendent getal. Een transcendent getal heeft als eigenschap dat de volgorde van de getallen geen vaste regelmaat hebben. Dit is in 1882 door Ferdinand von Lindemann bewezen met de formule van Euler. Pi is een ook irrationaal getal, dat betekent dat je het niet als een breuk kan schrijven. Maar het is niet echt makkelijk om dit te bewijzen. James Gregory heeft het in 1667 geprobeerd met zijn boek 'Vera circuli et hyperbolea quadratura', maar zijn bewijs bleek fout te zijn.
In 1761 werd het wel bewezen door Johann Heinrich Lambert. Pi is ook een constante getal. Welke straal of diameter je ook neemt voor een perfecte ronde cirkel, de verhouding van de omtrek en diameter is altijd hetzelfde, namelijk zo rond de 3,141592654(en ga zo maar door).

PI–gekte

Degene die als eerste inzag dat pi niet een exact getal was, maar alleen benaderd kon worden, was Archimedes. Maar gedurende vele eeuwen daarna, waren er nog steeds mensen die pi tot in de zoveel decimalen achter de komma probeerden te berekenen. Ludolph van Ceulen rekende 35 decimalen uit en was hier zo trots op dat hij deze getallen op zijn grafsteen heeft laten zetten.
In 1853 maakte Rutherford bekend dat hij pi tot 440 cijfers achter de komma had gerekend. En daar bleef het niet bij, het huidige record staat op 1,26 biljoen cijfers achter de komma. Heeft het eigenlijk wel zin om pi tot zoveel decimalen achter de komma uit de rekenen? Heeft het wel zin om er zoveel tijd aan te besteden? Het lijkt we alsof pi een soort magie uitoefent. Het doet iets met mensen waardoor ze rare dingen gaan doen. Sommige mensen leren de decimalen uit hun hoofd. Het huidige record is in handen van de Japanner Hiroyuki Goto. Hij kent 42.000 decimalen uit zijn hoofd en had 9 uurtjes nodig om ze allemaal op te zeggen.
Op een gegeven moment bedacht men zelfs dat pi een eigen dag zou krijgen. Deze feestdag wordt gevierd op 14 maart en de feestelijkheden beginnen om 1 uur 59 minuten (3.14 1:59). Door Exploratorium van San Francisco worden er allerlei activeiten georganiseerd die te met pi te maken hebben, zoals π-liedjes, π-spelletjes, enz.

Archimedes

Archimedes was een belangrijke wiskundige uit de Griekse Oudheid. Van hem zijn redelijk wat geschriften bewaard gebleven. Pi was een onderwerp dat hem heeft geobsedeerd. Zijn methode om Pi te berekenen is redelijk makkelijk. Met zijn methode kun je zelf bepalen welke nauwkeurigheid je wilt bereiken. Archimedes' methode was werken met regelmatige veelvlakken. Neem een cirkel met een diameter van 1. In deze cirkel teken je dan 2 veelhoeken met 3 x 2^n zijden. De een is dan een ingeschreven veelhoek en de ander een omgeschreven veelhoek.

De omtrek van een ingeschreven zeshoek is dan 3. De cirkel is langer dan deze ingeschreven zeshoek, dus pi is groter dan 3. Op deze manier kan hij de omtrek van een ingeschreven en omgeschreven 12-hoek, 32-hoek, en 96-hoek berekenen. Bij de ingeschreven 96-hoek kwam hij uit op een omtrek van 223/71. Bij de omgeschreven 96-hoek kwam hij uit op 22/7. Pi moet dus tussen 223/71 en 22/7 liggen.

Wiskunde Praktische Opdracht: Geschiedenis

Geschiedenis van het getal π

1. π in de Oudheid

2. π in de Middeleeuwen

3. π in de Moderne Tijd

1. π in de Oudheid

De geschiedenis van het getal π begint bij een papyrus rol uit ongeveer 1650 voor Christus, de Rhind Papyrus. Op deze rol was een wiskundig vraagstuk geschreven door een Egyptische klerk genaamd Ahmed. Op de rol stond: 'Kort een cirkel met 1/9de deel in en maak op het overige daarvan een vierkant. De oppervlakte van dit vierkant heeft dan hetzelfde oppervlakte als de eerste cirkel". In andere woorden: de oppervlakte van een cirkel is 8/9 maal de diameter in het kwadraat. Zo kan je π dus berekenen, namelijk: (16/9)^2= 3,16049.

Op de Rhind Papyrus staat een mogelijke verklaring voor hoe ze op deze benadering zijn gekomen, namelijk door in een vierkant met zijdes van 9 (laten we als eenheid centimeters nemen voor de makkelijkheid) een cirkel te tekenen die net de randen ervan raakt. Vervolgens maak je in het vierkant een achthoek. De oppervlakte van deze achthoek is dan 63 vierkante cm. Dit kan je berekenen door van de oppervlakte van het vierkant, de oppervlakte van de hoeken af te trekken.

Deze oppervlakte lijkt veel op de oppervlakte van een vierkant met zijdes van 8 cm dus nemen zij als oppervlakte van de cirkel, die je in het begin hebt getekend, 64 vierkante cm. Dit betekent dus dat π een waarde van 4 maal (8/9) in het kwadraat = 256/81 = 3,16049 heeft.

Rond dezelfde tijd waren de Babyloniërs ook bezig met het getal π. Eerst werd er altijd gedacht dat de Babyloniërs voor het getal π een waarde van 3 hadden genomen. Maar in 1936 is er in Susa (vlakbij Babylonië) een kleitablet gevonden waar het duidelijk op wordt dat zij 3 en (1/8) voor het getal π nemen. Vervolgens kunnen we verder met de geschiedenis van π bij de Bijbel. In de bijbel staat namelijk een beschrijving van het koperwerk van een tempel die bij het paleis van Salomo hoorde: "En hij maakte het van de ene kant tot de andere kant tien el breed..., en een touw van dertig el was de omtrek". Hieruit kan je dus afleiden dat zij π = 3 als waarde voor π namen. Dat was een benadering van het getal π die zelfs in die tijd slecht was. De Egyptenaren en de Babeloniërs hadden duidelijk een betere benadering.

Langzamerhand begonnen de Grieken ook geïnteresseerd te raken in het getal π. Zo ook de bekende Griek Archimedes (ongeveer 250 voor Christus). Hij gebruikte dezelfde methode zoals de Egyptenaren dat

deden met de veelhoeken. Archimedes kwam ook met het idee om π tussen bepaalde waardes in te klemmen. Het is hem gelukt π tussen 3 71/10 en 3 1/7 te zetten. Aangezien er toen nog geen decimalen bestonden gebruikten ze breuken om zo het getal aan te geven. Pas in de 2e eeuw na Christus werd een zestigtallig stelsel ingevoerd waarbij π kon worden genoteerd als 3° 8☺ 30☺, tegenwoordig geschreven als 3,14166.
Vervolgens zijn de Chinezen aan de beurt om mee te helpen aan de ontwikkeling van π. De Chinezen hadden toentertijd al het decimale getallenstelsel en het getal 0. Het was de Chinese meneer Liu Hui die in 263 na Christus met een nauwkeurigere benadering voor π kwam. Hij gebruikte ook dezelfde tijdrovende manier van die Grieken. Uiteindelijk na jaren lang berekeningen te hebben uitgevoerd kwam hij tot de conclusie dat de waarde van π moest liggen tussen 3,141024 en 3,142704. Deze waarde hield het twee eeuwen vol voordat hij verbetert werd. Hij werd verbetert door vader en zoon Tsu Ch'ung-Chih. Zij kwamen er op (weer na veel berekeningen) dat de waarde van π 3,1415929. Dit getal komt al aardig in de richting van de waarde die we nu van het getal hebben.

2. π in de Middeleeuwen

Één van de uitvinders van het decimale getallenstelsel heeft zich ook bezig gehouden met het getal π. Zijn naam was Jamshid al-Kashi en kwam oorpronkelijk uit Iran. In 1420 werd al-Kashi uitgenodigd door koning Oeloeg Beg om in Samarkand te komen te wonen en zijn armoedige leven in Iran achter zich te laten. Koning Oeloeg Beg was zelf ook een bewonderaar en liefhebber van wiskunde net zoals al-Kashi. Op de afbeelding hiernaast heeft al-Kashi vermenigvuldigingen van 2π genoteerd. Maar 2π is de benaming die wij tegenwoordig gebruiken voor dit getal. Al-Kashi en andere wiskundigen uit die tijd noemden het: "De verhouding van de omtrek van de cirkel tot de straal." De meest rechter tekens op het schema stellen de getallen 1 tot en met 10 voor (van boven naar beneden). De tekens links naast die getallen stellen 2π, 4π, 6π, 8π, 10π, 12π, ..., 20π voor. Bij de vijfde regel staat er dus de waarde van 10π geschreven (de cijfers moet je van links naar rechts lezen). Je kan de getallen lezen door de getallen van 1 tot en met 10 (aan de rechterkant van boven naar beneden) te vergelijken met wat er in regel 5 staat en zo kan je dus zien welk getal er staat. En er staat inderdaad 31415926535897932 het getal π dus. Alleen het laatste getal staat er dat het een 5 is, maar dit is onjuist.
In 1596 gebeurde er in Nederland eindelijk ook eens iets belangrijks voor de benadering van π. Meneer Ludolph van Ceulen had π op 20 decimalen uitgerekend. Hij was niet bekend met de manier de al-Kashi had gebruikt om de waarde te berekenen, en rekende dus jarenlang op dezelfde manier de getallen uit zoals de Grieken het in de Oudheid ook deden. De manier dus met steeds meet veelhoeken tekenen. Later in zijn leven (rond 1620) rekende van Ceulen 35 decimalen van π uit. Toen van Ceulen gestorven werd hij begraven in de Pieterskerk in Leiden waar op zijn graf de waarde van π, die hij had uitgerekend (de 35 decimalen dus), werd uitgebeiteld. Maar helaas is zijn graf vernietigt tijdens het verbouwen van de kerk.

3. π in de Moderne Tijd

Sinds die tijd is de interesse voor π in de westerse wereld niet meer weggegaan. De mensen bleven maar proberen nieuwe decimalen uit te rekenen. Zoals bijvoorbeeld Gregory en Leibnitz, die hadden bedacht om π uit te rekenen aan de hand van een bepaalde oneindige som (arctangens-series). Toen kwam John Machim, die π als eerste 100 decimalen van π had uitgerekend. Rond 1750 had een zekere Leonhard Euler een betere arctangens-serie gevonden dan de anderen. Vervolgens had William Shank in 1873 707

decimalen van π uitgerekend op de manier die Leonhard Euler had gevonden. Maar in 1945 kwam men erachter dat het 528ste decimaal was fout gegaan en dus de decimalen daarachter ook.
Na 1945 kregen de wiskundigen hulp van de rekenmachine. Eerst waren er rekenmachines de waarvan je nog handmatig aan de wieltjes moest draaien om eindelijk een antwoord te krijgen. Met zo een rekenmachine had mr. Ferguson in 1947 π uitgerekend tot 808 decimalen.Twee jaar daarna rekende mr. Smith met zo'n zelfde rekenmachine 1120 decimalen uit. Maar hierna was het gedaan met het 'primitieve' rekenapparaatje, de elektronische computer was uitgevonden. In 1949 was in 70 uur op de computer genaamd de ENIAC al 2037 decimalen uitgerekend.
Daarna kwam de NORC die in 1955 3089 decimalen had uitgerekend. Vanaf toen bleef het maar doorgaan met decimalen. In 1961 100.000 decimalen en in 1973 een miljoen decimalen. In 1976 had een Eugene Salamin een nieuwe methode ontdekt die voor een doorbraak zorgde. De wiskundigen hoefden dus niet meer te rekenen op de manier zoals ze dat voor 1900 altijd gedaan hadden, maar hadden nu een betere en snellere manier. Dus, nieuwe reden om verder te gaan met decimalen uitrekenen. In 1982 8 miljoen decimalen, in 1989 het miljard, in september 1999 206.158.430.000 decimalen.
En nog steeds willen mensen meer en nieuwe decimalen uitrekenen...

Wiskunde Praktische Opdracht: Belang van Pi + Toepassing

Het Belang van Pi

Het belang van pi, oftewel welke toepassingen zijn er mogelijk met dit oneindige getal. Pi wordt toegepast in diversen formules, vooral de formules die te maken hebben met een cirkel.

Toepassingen van Pi in de praktijk

De formules waar het getal pi in staat worden eigenlijk voor eindeloos veel doelen gebruikt. Het wordt vooral veel gebruikt in de bouw of bij het ontwerpen en maken van spullen. In de bouw kan het gebruikt worden voor bijvoorbeeld ronde huizen of gebouwen, bij pleinen, en in het klein bij ramen of patronen in steen en ga zo maar door.
Op deze afbeelding zie je een groot rond raam, hier kan de omtrek en de oppervlakte berekend worden met behulp van het getal pi en de formules: omtrek = 2pr en Oppervlakte = pr^2.
In de praktijk wordt pi vooral gebruikt in combinatie met een vlakke cirkel, maar het kan ook gebruikt worden voor verschillende driedimensionale meetkundige figuren. Zoals de bol en de kegel en de cilinder. Hier kan dus ook de inhoud worden berekend. Deze figuren zie je minder terug in de bouw, behalve dan bij cilindervormige gebouwen.
Bij dit schaaltje zou je met behulp van de formule van de bol de inhoud kunnen
bepalen: inhoud = 1/3r • oppervlak .
Dan moet je wel het antwoord door twee delen. En het oppervlak kan je berekenen met de formule oppervlakte bol = $4pr^2$.
Maar dit kan je natuurlijk ook bereken door water in de kom te doen en te meten hoeveel je hebt moeten toevoegen.

Wiskunde Praktische Opdracht: Pi en Meetkunde

Toepassingen van Pi in de meetkunde

Het getal p is zeer belangrijk voor de meetkunde, zonder dit getal is het bijna onmogelijk om antwoorden te krijgen op de vraag wat de oppervlakte of de omtrek van een cirkel is.

Cirkel

Het getal p kan je omschrijven als de verhouding tussen omtrek en diameter van een cirkel.

Of als je de straal r van de cirkel gebruikt:

Omtrek = 2 • p • r

Deze omtrekformule is dus niets bijzonders, het legt gewoon vast wat we onder het getal p verstaan. p komt ook in de oppervlakteformule van een cirkel:

Oppervlakte = p • r^2

Maar eigenlijk hebben oppervlakte en omtrek in eerste instantie niets met elkaar te maken. Je hebt hier de oppervlakteformule van een driehoek voor nodig: oppervlakte =½ • breedte • hoogte

Je gebruikt dan ook de omgeschreven veelhoek van een cirkel met straal r. Van deze omgeschreven veelhoek maak je driehoeken, waarbij de toppen in het middelpunt uitkomen, de basis de cirkel raakt en de hoogte dan de straal r is. Zoal hier rechts.

De oppervlakte van de veelhoek is dus gelijk aan de oppervlakte van alle driehoeken. Dat wil zeggen ½ • r maal de som van de bases van de driehoeken. De som van de bases van de driehoeken is de omtrek van de veelhoek. Dus ½•r•omtrek is oppervlakte. Dit is dus waar voor alle veelhoeken, en een cirkel licht volgens het principe van Archimedes erg dicht bij een veelhoek, want een 96 hoek lijkt al erg op een cirkel. En 'doe' nu de 2 formules bij elkaar: ½•r•omtrek en 2•p•r, dat wordt dus pr^2 (q.e.d.).

Cilinder

De cilinder is een figuur zoals hier rechts.

De formule voor de inhoud van een cilinder is:

Inhoud= p • r^2 • h

Dit is makkelijk te achterhalen want de uiteinden van een cilinder zijn cirkels, dus hoef je de formule van de oppervlakte van een cirkel alleen maar te vermenigvuldigen met de hoogte.

Kegel

De afstand van de top tot het vlak waarin het grondvlak ligt noemen we de hoogte van de kegel. We geven die met de letter h aan. De inhoudsformule voor de kegel gaat als volgt:

Inhoud = 1/3 • h • p • r^2

Dit kan je ook achterhalen omdat het grondvlak hier een cirkel is dus p•r^2 is dus de oppervlakte van het grondvlak. De h is de hoogte van de kegel, dit is de afstand van de top tot het vlak waarin het grondvlak ligt.

Bol

In al het vorige is uit omtrek = 2pr de oppervlakteformule van een cirkel afgeleid, en daarmee de inhoudsformule voor de bol:

Inhoud = 1/3 • r • oppervlak

Er is dus nog een formule die ontbreekt, de oppervlakte voor een bol:

Oppervlakte = 4 • p • r^2

Conclusie

Zo zijn nu de figuren met zijn bijbehorende formules besproken. Al deze formules zijn stuk voor stuk erg belangrijk voor de meetkunde in het algemeen, maar ook voor veel praktische doeleinden. Nu laat ik zien hoe je pi in een formule kunt zetten.

De somnotatie

We kunnen formules verkort opschrijven,

door gebruik te maken van het ∑-symbool.
Dit is de Griekse hoofdletter S (Sigma).
Zo kan je de formule 1/1 + ½ +1/3 + … + 1/n
ook opschrijven als:
De ∑ wil zeggen dat het om een som gaat. De 1/k staat voor de vorm van de sommen. K loopt van 1 tot n.
Dit kun je zien, omdat er onder het ∑ symbool “k=1” staat. Boven het ∑ symbool staat een n.
Het nut van het verkort opschrijven is dat oneindige reeksen niet meer met “…” aangegeven hoeven te worden. Bovendien is het overzichtelijker (vooral bij ingewikkelde formules) en is het minder werk om het op te schrijven.

De meetkundige reeks

De meetkundige reeks is een reeks die je nodig hebt om de formule op te bouwen.
Neem een getal x. nu is het de bedoeling dat je de oneindige reeks x0 + x1 + x2 + x3 + … (etc.) uitrekent, op voorwaarde dat hij convergeert. Dit kan alleen als | x | < 1, want anders zouden de termen xn niet eens naar nul gaan als n à ∞ (oneindig) is.
Opmerking: de oneindige reeks die hierboven staat, kan ook als volgt worden opgeschreven: 1 + x + x2 + x3 + … (x0 is immers altijd 1!)
Nu gaan we voor de n de eerste n-termen (1 + x + x2 + … + xn–1) uitrekenen. Je noemt deze som dan Sn.
Voor deze Sn kunnen we een formule geven. We schrijven Sn en xSn onder elkaar, en strepen vervolgens de gelijkheden in beide formules weg:
Sn = 1 + x + x2 + x3 + … + xn-2 + xn-1
xSn = x + x2 + x3 + … + xn-2 + xn-1 +xn
Na het wegstrepen van de gelijkheden in beide formules (onderstreept in de formules) blijven alleen de 1 en xn over. Nu trek je Sn en xSn van elkaar af. Je krijgt dan:
Sn – xSn = 1 – xn
Nu kun je aan beide kanten van de formule delen door 1 – x. wat we dan krijgen heet de “Meetkundige som”:
Sn = 1 – xn/1 – x (x ≠ 1)
Deze gelijkheid kunnen we nu als volgt omschrijven: de som 1 + x + x2 + … + xn-1 is bijna gelijk aan 1/1-x.
Nu laten we van n naar ∞ (oneindig) gaan.
Het gevolg is dat voor elke x met –1 < x < 1 geldt:
1 + x + x2 + x3 + … = 1/1-x
Je noemt dit de meetkundige reeks. Als voorbeeld vullen we nu in:
x = 1/4 en x = 1/2:
1 + 1/4 + (1/4)2 + (1/4)3 + … = 1/1-(1/4) = 11/3.
1 + 1/2 + (1/2)2 + (1/2)3 + … = 1/1-(1/2) = 2
We kunnen de meetkundige reeks ook opschrijven als een somnotatie. De formule komt er dan zo uit te zien:
En k loopt naar oneindig.

Wiskunde Praktische Opdracht: Kwadratuur Cirkel

De kwadratuur van de cirkel

In het Oude Griekenland waren er 3 grote wiskundige vraagstukken, namelijk de driedeling van een hoek,

de verdubbeling van de kubus en de kwadratuur van de cirkel met passer en liniaal. (Maar vandaag jongens, meisjes en meneer Theune gaan we het hebben over het kwadratuur van de cirkel.) De kwadratuur van de cirkel heeft betrekking op onze Praktische Opdracht, want het heeft iets te maken met pi.De kwadratuur van de cirkel is een probleem, waarin gevraagd wordt om met een passer en liniaal, een vierkant te construeren met precies dezelfde oppervlakte als die van een cirkel met een straal 1. Dit probleem heeft al vele eeuwen lang wiskundigen, zowel professionele als amateuristische, bezig gehouden. Dit wiskundige probleem is niet alleen moeilijk om op te lossen, het kan niet opgelost worden. Al in de tijd van Grieken waren er mensen bezig om dit vraagstuk op te lossen, zoals Anaxagoras, Hippocrates, Archimedes en Dinostratos. Het Rhind papyrus, genaamd naar Henry Rhind, die dit geschrift in 1858 had gekocht, is een van de oudste wiskundige geschriften. Deze boekrol is rond 1650 v. Chr. geschreven door de klerk Ahmes, die het weer heeft gekopieerd van een 200 jaar oudere document. In deze Rhind papyrus beschrijft Ahmes een manier om een vierkant te construeren met een oppervlak dat bijna gelijk is aan die van een cirkel, namelijk zo. Van een cirkel neem je 8/9 deel van de diameter als een zijde van het vierkant. Dit is niet echt een precieze manier om de kwadratuur van de cirkel te berekenen, maar het laat in ieder geval wel zien dat het probleem om een vierkant te construeren met een oppervlak gelijk aan een cirkel al een lange tijd mensen heeft beziggehouden.
In 1882 bewees de Duitse wiskundige Ferdinand van Lindemann dat pi een transcendent getal is. Transcendent betekent niet-algebraïsch getal. En niet-algebraïsch houdt in dat de exacte waarde niet te berekenen is. Dus hoeveel decimalen achter de komma je ook uitrekent, het heeft geen nut. Sinds de tijd dat Lindemann heeft aangetoond dat pi transcendent is, staat het vast dat pi altijd onmeetbaar is, hoeveel decimalen je ook uitrekent.
Om een vierkant te construeren met dezelfde oppervlakte als die van een cirkel met een straal 1, heb je de precieze waarde van pi nodig. En aangezien in 1882 is bewezen dat pi een transcendent getal is, is het onmogelijk om een vierkant te construeren dat dezelfde oppervlak heeft als die van een cirkel met straal 1. Hoewel het is bewezen dat de kwadratuur van de cirkel onmogelijk is, heeft dat de mensen niet weerhouden om het toch te proberen.
Bewijs:
Stel dat je een cirkel hebt met een straal r. De oppervlakte van deze cirkel is dan
πr^2. Je moet nu een vierkant te construeren met dezelfde oppervlakte als die van de cirkel. De zijden van de vierkant noem ik voor het gemak a. De oppervlakte van de vierkant reken je uit door 2 zijdes met elkaar te vermenigvuldigen, dus a^2. De oppervlaktes moeten hetzelfde zijn dus, a^2 moet gelijk zijn aan πr^2. $a^2= \pi r^2$, a is dus gelijk aan de de straal keer wortel van pi. (ik kon het wortelteken niet vinden, dus heb ik het maar even uitgeschreven.) Dus we moeten een lengte van wortel pi construeren.
Veel mensen willen niet geloven dat de kwadratuur van cirkel onmogelijk is. Het is een soort “ziekte” waar de mensen aan lijden om dit probleem op te lossen. Mensen die aan deze ziekte lijden noemt men morbus cyclometricus. In de Oudheid noemde Aristophanes deze mensen cirkelkwadrateerders en maakte ze belachelijk in zijn boek “De vogels”.

Wiskunde Praktische Opdracht: Pi in de Getallenverzameling
Waar hoort Pi in de getallenverzamelingen?
Getallenverzamelingen zijn groepen waar bepaalde (soorten) getallen in horen. In totaal zijn er 4 verzamelingen;

• N (van natuurlijke getallen zoals 1, 2, 3,4 … enz.)
• Z (van gehele getallen waar dus ook negatieve getallen horen, … -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 … enz.)
• Q (de verzameling van breuken met a/b; a en b zijn gehele getallen uit de verzameling van Z)
• R (dit is de verzameling van reële getallen, gehele getallen, wortels…)
Waarbij N een deelverzameling van Z is, Z een deelverzameling van Q, en Q is een deelverzameling van R. R bevat dus eigenlijk alle getallen die er zijn.
Pi hoort dus in de getallenverzameling van R omdat het geen natuurlijk getal is, het is ook geen geheel getal (immers Pi = 3.14159265…) en het is ook geen breuk. Dan rest er maar een verzameling over, namelijk R.
De verzamelingen N, Z, Q en R zijn alle vier oneindig groot maar onderling is er ook een verdeling, sinds N, Z en Q alledrie aftelbaar en oneindig groot zijn, zijn ze even groot. R is in tegenstelling tot N, Z en Q oneindig groot omdat het alle getallen omvat. R is onaftelbaar.

Wiskunde Praktische Opdracht: Pi Programma
Een programma voor op de GR om Pi te benaderen
Dit is een programma dat de waarde van Pi kan berekenen op je Grafische Rekenmachine (TI-83+). Ik heb het programma niet zelf geschreven want het is in de code gezet (Disp "BY:"… Kiros Lionheart"). Toch vind ik het wel leuk om het erbij te zetten. Het is een heel gedoe om het programma zo in te typen op de rekenmachine, overigens is het wel mogelijk want het is wel gewoon in Basic (de programmeertaal op de rekenmachine) geschreven, maar het kan via een linkkabel op de computer overgezet worden op de grafische rekenmachine.
Misschien is het wel handig als ik de code een beetje uitleg:
• ClrHome: Het hoofdscherm leeghalen
• Disp: Toont wat er in de aanhalingstekens staat
• Pause: Pauzeren voor een paar miliseconden
• Lbl x (x = variabel): Dit is een heel handig commando want gecombineerd met 'Goto' kan je de GR laten verspringen naar een label dat je hebt ingesteld. Je moet een label een naam geven zodat de label uniek is en je moet ook een waarde aangeven. Zie Vb.

```
Lbl MM
:Input "1,2?",A
:If A=1
:Goto EF
:If A=2
:Goto YU
:Lbl EF
:Disp "You entered 1"
:Stop
:Lbl YU
:Disp "You entered 2"
:Pause
:Goto MM
```

• Goto x (x = variabele): Met dit commando kan je als een bepaalde waarde is bereikt de GR naar een

eerder genoemde ‘Label’ sturen. Zie Vb.
• FnOn/Off: Dit commando zorgt ervoor dat formules die in het ‘Y=’ menu zijn gezet wel/niet worden geplot
• PlotsOff: Zet alle grafieken die zijn ingesteld bij ‘Stat Plot’ uit
• ClrDraw: Verwijdert alle grafiek/tekeningen die te zien zijn op het plotvenster
• AxesOn/Off: Om de assen van de grafiek aan/uit te zetten
• GridOn/Off: Om de lijnen op de achtergrond van de grafiek aan/uit te zetten
• CoordOn/Off : Om de getallen x = ... en y = ... in de grafiek aan/uit te zetten
- - - - - - - - - - - -
• Input: Als deze opdracht wordt uitgevoerd dan vraagt de GR iets wat tussen de aanhalingstekens staat en slaat dat op; het wordt dan opgeslagen in het cijfer / de letter / de string dat achter de aanhalingstekens staat. Vb. Input - “Hoeveel herhalingen?”, G - geeft op het scherm weer: ‘Hoeveel herhalingen’ waarna een getal ingetypt kan worden dat als G wordt opgeslagen.
• DispGraph: Een opdracht om de grafiek te plotten
• ZStandard: Voor een normaal [-10,10] x [-10,10] scherm
• Stop: Dit beëindigt het programma

Deel 1

ClrHome
Disp "STARTING UP..."
Full
ClrHome
Disp " Pi PLOTTER"
Pause
ClrHome
Disp "BY:","","KIROS LIONHEART"
Pause
ClrHome
Lbl 1
ClrHome
Menu("Pi PLOTTER","START",2,"INFO",I,"QUIT",3)
Lbl I
ClrHome
Disp " Pi PLOTTER"," VERSION 1.2"," RELEASE 2"
Pause
Goto 1
Lbl 2
FnOff
PlotsOff

Deel 2

"Ã„"Ã¼YÂ😉
ClrHome

```
Input "ITERATIONS: ",Z
Prompt Ymin,Ymax
.1*(Ymax-Ymin)Ã¼Yscl
ZÃ¼Xmax
Z/10Ã¼Xscl
0Ã¼B
For(I,0,Z-1)
B+((Ã°1)^I)/(2I+1)Ã¼B
Pt-On(I,4B)
Text(1,5,I+1)
End
Pause
FnOn 1
DispGraph
Input
ClrHome
Disp "CLOSEST APPROX.","OF Pi IS",4B
Pause
Goto 1
Lbl 3
FnOff 1
```

Nu de meeste commando's / opdrachten zijn uitgelegd kunnen we gaan uitleggen wat het programma nou eigenlijk doet. Als het programma is ingeladen op de GR laat hij eerst zien hoe het programma heet en door wie het is geschreven. Daarna krijg je een menu 'Pi Plotter" en kan je zieken uit Start, Info en Quit. Als je voor 'Info' gekozen hebt geeft het programma zijn versienummer weer (Versie 1.2 Release 2) en voor 'Quit' beindigt hij het programma maar voor 'Start' gaat het programma verder. Hij vraagt hoeveel herhalingen je wilt hebben en dan benadert hij het getal Pi. Aan het einde van het programma vertelt hij dat de dichtstbijzijnde benadering dat hij kan geven het getal 3.14159265 is.

Wiskunde Praktische Opdracht: Pi Poëzie

Pi gedichten

Dit zijn Pi gedichtjes die ik heb gevonden op het Internet. Deze gedichten gaan over Pi maar ze hebben iets speciaals. Elk van deze hebben namelijk het getal Pi in het gedicht verborgen. Er bestaan tientallen gedichten om Pi te kunnen onthouden maar ik heb een kleine selectie gemaakt.

Poe, E,(3,1)
Near a Raven (415)
Midnights so dreary, tired and weary. (926535)
Silently pondering volumes extolling all by-now obsolete lore. (897932384)
During my rather long nap - the weirdest tap! (62643383)
An ominous vibrating sound disturbing my chamber's antedoor.(27950288)
"This", I whispered quietly, "I ignore". (419716)
Perfectly, the intellect remembers: the ghostly fires, a glittering ember.

Inflamed by lightning's outbursts, windows cast penumbras upon this floor.
Sorrowful, as one mistreated, unhappy thoughts I heeded:
That inimitable lesson in elegance - Lenore -
Is delighting, exciting...nevermore.
Ominously, curtains parted (my serenity outsmarted),
And fear overcame my being - the fear of "forevermore".
Fearful foreboding abided, selfish sentiment confided,
As I said, "Methinks mysterious traveler knocks afore.
A man is visiting, of age threescore."
Taking little time, briskly addressing something: "Sir," (robustly)
"Tell what source originates clamorous noise afore?
Disturbing sleep unkindly, is it you a-tapping, so slyly?
Why, devil incarnate!--" Here completely unveiled I my antedoor--
Just darkness, I ascertained - nothing more.
While surrounded by darkness then, I persevered to clearly comprehend.
I perceived the weirdest dream...of everlasting "nevermores".
Quite, quite, quick nocturnal doubts fled - such relief! - as my intellect said,
(Desiring, imagining still) that perchance the apparition was uttering a whispered "Lenore".
This only, as evermore.
Silently, I reinforced, remaining anxious, quite scared, afraid,
While intrusive tap did then come thrice - O, so stronger than sounded afore.
"Surely" (said silently) "it was the banging, clanging window lattice."
Glancing out, I quaked, upset by horrors hereinbefore,
Perceiving: a "nevermore".

To be continued... (For full version please visit http://users.aol.com/s6sj7gt/mikerav.htm)

Uitleg "Near a Raven"

Dit gedicht bestaat oorspronkelijk uit 18 delen maar om het niet te lang te maken heb ik er 6 uit genomen en hier geplaatst. Het hele gedicht echter, is te vinden op het adres onderaan het gedicht op deze pagina. Het gedicht is gepubliceerd in 1995 en lijkt veel op een ander gedicht van van Edgard Ellen Poe. Het gebruikt hetzelfde rijmschema, verhaal en intonatie als het origineel en is daarom extra bijzonder. Maar wat het gedicht nog meer bijzonder maakt is dat het (gehele gedicht althans) de eerste 740 decimalen! van het getal Pi omvat.

Het schema werkt als volgt:

Een woord van N letters staat voor:
- het getal N als N<10
- het getal 0 als N=10
- Twee opeenvolgende cijfers als N>10

vb. een 14-letterig woord staat voor het getal 1 én 4 na elkaar.

Dit uitgelegd hebbende kunnen we nu beginnen met het ontcijferen. Het hele gedicht telt mee, inclusief de naam (vandaar dat – Poe, E – bovenaan staat) en de titel. Elk woord staat voor een decimaal van Pi en kan worden achterhaald door het aantal letters van een woord te tellen.

Ik heb alvast een begin gemaakt met het omzetten van de woorden in decimalen. De gevonden cijfers staan achter de zin in het rood.

Let op!

Leestekens tellen niet mee en als er 2 woorden aan elkaar zijn gekoppeld m.b.v. een koppelteken dan worden ze ook aangezien als twee woorden.

e.g. by-now = 2 3

Antwoord eerste couplet:

3, 1 415 926535 897932384 62643383 27950288 419716 ...

...vervolg Pi gedichten:

Musings of a Mathematician

Note: the number of letters in each word of this poem represents a digit of pi, beginning with 314. The sound O represents the digit 0.

Why, π! Stop, π! Weird anomalies do behave badly!
You, madly conjured, imperfect, strange, numerical,
Why do you maintain this facade?
In finite time you are barbaric!
You do wonders, mesmerize minds!
O, do elements numerous have a beautiful meaning-
A system isolating all mysteries, solutions for puzzles, chaos, a
O snafu apparent in O Universal Concept from believing lies?
That there, obstinate in you, O Strange Constant,
A Divine Sign O exists is unlikely unless
Is O revealed Something Brilliant, negating belief!
In formulas, O, you show yourself in Greek and math as a π forever--
O hidden wonders absconded, infinite, in a tiny constant, O, sneakily, rather?
Never, I say!

↑ Dit gedicht heft wel weer verborgen cijfers van Pi en ook hierbij tellen leestekens niet mee. Als er een O staat in het gedicht staat het voor het cijfer 0. Het begint met “Why,” en dat staat voor 3, enz...

Pi Rap

If I gave you a 3
and a 1,4,1,5
You'd have the start
of the greatest number alive
If Pi were reduced
to a mere 3,
The circles of the world
would be hexagonal, you see

>>> Dit is geen echt gedicht waarin alle woorden voor een decimaal van Pi staan maar het is een leuke rap.

Dit zijn enkele gedichten over Pi en zoals je kunt zien werken zulke gedichten wel goed (maar dan moet je ze wel kunnen onthouden). Het is ontzettend veel werk om zulke gedichten zelf te verzinnen en er bestaan dan ook een aantal korte zinnetjes om een aantal decimalen te achterhalen:

"How I need a drink, alcoholic in nature, after the heavy lectures involving quantum mechanics!"

Wiskunde Praktische Opdracht: Pi Weetjes

Pi weetjes

Wist je dat Pi...

• de zestiende letter is van het Griekse alfabet?
• de verhouding van een cirkel tot een vierkant wanneer één kant van het vierkant de straal van de cirkel is?
• gelijk is aan 180 graden in radialen
• de titel is van een film gemaakt door Darren Aronofsky?
• ook een parfum is?
• groter is dan 5 miljard cijfers?
• sinds 1997 tot de 42.000e cijfer is onthouden?
• berekend is door een aantal van de belangrijkste wiskundigen, wetenschappers, en filosofen in geschiedenis?

Wiskunde Praktische Opdracht: Slot

Slot

Als we terug kijken op de samenwerking bij dit PO zijn we allemaal zeer tevreden. De communicatie ging vrijwel perfect en iedereen deed zijn taak zoals het hoorde. Als één van ons een bepaald aspect van Pi (zoals een berekening) niet snapte, werd hij door een ander geholpen, of juist andersom. We kunnen dus concluderen dat het een fijne samenwerking was namens ons allen.
In het begin toen we te horen kregen dat we een PO voor wiskunde moesten maken, moeten we eerlijk toegeven dat we verwacht hadden dat het een beetje saai zou zijn. Maar het bleek juist enorm mee te vallen toen we eenmaal begonnen waren. We waren eigenlijk best blij dat we Pi hadden gekozen en niet iets anders, want er waren veel geinige weetjes en eigenschappen van Pi die je gewoon leuk en interessant vind om te weten. We zijn uiteindelijk zelfs dingen gaan opzoeken over Pi die we niet in het PO hebben gestopt maar wat we gewoon leuk vonden om te weten.
Op al onze vragen die we wilden onderzoeken hebben we een antwoord gevonden en we zijn hier dan ook erg blij mee. Mede dankzij de ELO konden we via thuis websites, (lees)materiaal en tips aan elkaar doorgeven. We hebben een apart project op de ELO aangemaakt en hebben daar al onze geschreven stukken op gezet zodat we konden bijhouden wat de anderen deden zodat er geen fouten gemaakt zouden worden. Ook konden we dankzij de ELO goed op elkaar inspringen en doorgaan met je verhaal op dingen waar de ander z'n verhaal stopte. We kunnen dus stellen dat de ELO ons veel hulp heeft geboden met name bij de communicatie.
Als we in een van de volgende jaren ooit iemand moeten adviseren over wat hij (of zij) voor het onderwerp van zijn (of haar) PO wiskunde, dan weet ik zeker dat wij in koor zullen roepen: Pi!!!

Wiskunde Praktische Opdracht: Bronvermelding

Bronnenlijst

Dit zijn alle websites/boeken die we hebben gebruikt bij het vinden van informatie over Pi. Van sommige websites hebben we veel informatie gehaald en van andere hebben we maar een plaatje.

Websites:

- http://www.math.uu.nl/people/hogend/oratie.html
- http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Pi_through_the_ages.html
- http://oldweb.cecm.sfu.ca/projects/ISC/Pihistory.html
- http://faculty.ed.umuc.edu/~swalsh/Math%20Articles/Pi.html
- http://www2.werkstuknetwerk.nl/rug/fwn/stat/167/documentatie.html
- http://home.versatel.nl/nytemyre86/Lege%20pagina%2010.htm
- http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Squaring_the_circle.html
- http://mathforum.org/isaac/problems/pi1.html
- http://wiskunde.pagina.nl/
- http://members.lycos.nl/getalpi/home.htm
- http://oldweb.cecm.sfu.ca/projects/pihex/
- http://www.wiswijzer.nl/pagina.asp?nummer=130
- http://www.cijfers.net/pi.html
- http://wwwhome.math.utwente.nl/~jagersaa/Pi/index.html
- http://www.cecm.sfu.ca/~jborwein/pi_cover.html
- http://gunnie.ulyssis.org/pi/def_eig_2.html
- http://www.kennislink.nl/web/show?id=130402
- http://users.pandora.be/koen.beek/
- http://nl.wikipedia.org/wiki/Pi_(wiskunde)
- http://mathsforeurope.digibel.be/Pi.html
- http://www.math.uu.nl/people/hogend/pi.html
- http://mathforum.org/isaac/problems/pi2.html
- http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PrintHT/Squaring_the_circle.html
- http://www.kennislink.nl/web/show?id=84249
- http://gunnie.studentenweb.org/pi/def_eig_2.html
- http://www.geocities.com/annelies_droessaert/negatievegetallen.htm
- http://www.terdiscussie.nl/index.php?act=ST&f=13&t=1997&s=6fabc8c41ed93b79c472b2955a3ede3f
- http://www.math.uu.nl/people/hogend/pi.html
- http://nl.wikipedia.org/wiki/Pi_(wiskunde)
- http://www.science.uva.nl/onderwijs/wns/onderwijsCD/symmetrie/syllabus/jsindex.html
- http://www.kathimitchell.com/pi.html
- http://www.synchrondata.com/pheaven2/www/area14.htm
- http://www.programmersheaven.com/
- http://dad.ulyssis.org/~gunnie/pi/bijlagen.html
- http://www.escape.com/~paulg53/math/pi/
- http://tatay.kenosha.wi.us/TiBasic/
- http://www.arasian.com/vortex/83pbas/
- http://www.cijfers.net/pi.html
- http://users.aol.com/s6sj7gt/mikerav.htm
- http://members.aol.com/loosetooth/poem.html

Boeken:

- Wiskunde voor in je Binnenzak, van Albrecht Beutelspacher